第18講　積分法

1 曲線 C：$y=|x^2-4|$ と直線 l：$y=x+2$ について，次の問いに答えよ．

(1) C のグラフをかけ．

(2) C と l の交点の x 座標を求めよ．

(3) C と l で囲まれた部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

$y=|f(x)|$ のグラフ

$y=f(x)$ のグラフにおいて，

x 軸より「　　」の部分はそのまま．

x 軸より「　　」の部分を上に折り返す．

よって $f(x)=0$，つまり $f(x)$ と x 軸との交点の x 座標が必要．

面積を積分で求める

・境界となる曲線や直線の「　　　　　　　　」を求める

・「　　　　」を定める．

・$\int$ の式を立てる．グラフの上または下の式が変わる，また上下が入れ替わるところで $\int$ の式が複数に分かれる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 2つの放物線 $y=x^2-4x+5$ と $y=-x^2-2x+9$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

［2］ $a>0$ のとき，2つの放物線 $y=x^2-2$，$y=-ax^2+ax-1$ について，次の問いに答えよ．

(1) 2つの放物線の交点の x 座標を求めよ．

(2) 2つの放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

【Point Pickup】

∫の公式その①

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=$$

主に放物線と直線，放物線と放物線によって「　　　　　　」部分の面積に用いる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1)　放物線 $C：y=x^2+x-1$ と直線 $l：y=2x+1$ の交点の座標を求めよ．

(2)　(1)で求めた交点の x 座標の大きい方を x_0 とする．$a>x_0$ とし，C と l で囲まれた領域の面積を S_1，C と l および直線 $x=a$ で囲まれた領域の面積を S_2，C と l および直線 $x=-a$ で囲まれた領域の面積を S_3 とする．$S_1=S_2+S_3$ となるときの a の値を求めよ．

【Point Pickup】

面積がマイナス？

$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq g(x)$，つまり $f(x)$ のグラフが $g(x)$ のグラフより上にあるとき

$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$ は，$x=a$，$x=b$，$y=f(x)$，$y=g(x)$

によって囲まれた部分の面積である．このとき

$T=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx$ は，$T=-\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=-S$ であることより，

囲まれた部分の面積にマイナスをつけたものと考えることができる．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　積分法

［1］　曲線 $C：y=|x^2-2x|$ と直線 $l：y=\frac{1}{2}x$ によって囲まれた面積は $\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である.

［2］　2つの放物線 $y=x^2-3x+2$, $y=-2x^2-x+3$ で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　積分法

1　曲線 $C : y=|x^2-4|$ と直線 $l : y=x+2$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C のグラフをかけ．

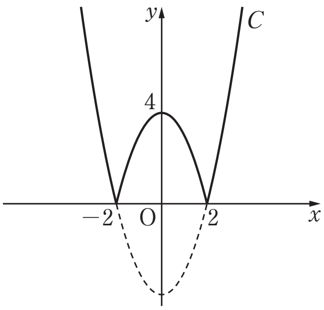
(2)　C と l の交点の x 座標を求めよ．

(3)　C と l で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)　$y=|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|$

$$=\begin{cases}(x+2)(x-2) & (x \leqq -2,\ 2 \leqq x)\\ -(x+2)(x-2) & (-2 \leqq x \leqq 2)\end{cases}$$

よって C のグラフは右図．



(2)　$x \leqq -2,\ x \geqq 2$ のとき

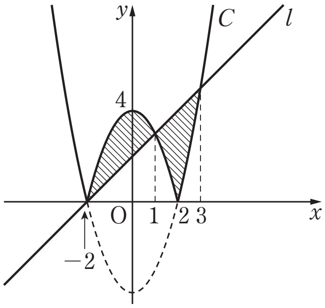
$x^2-4=x+2$　　$x^2-x-6=0$　　$(x+2)(x-3)=0$　　$x=-2,\ 3$

$-2 \leqq x \leqq 2$ のとき

$-x^2+4=x+2$　　$x^2+x-2=0$　$(x+2)(x-1)=0$　　$x=-2,\ 1$

よって求める交点の x 座標は　$\boldsymbol{x=-2,\ 1,\ 3}$

(3)　求める面積は右図斜線部分



$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+4)-(x+2)\}dx$$

$$+\int_{1}^{2}\{(x+2)-(-x^2+4)\}dx$$

$$+\int_{2}^{3}\{(x+2)-(x^2-4)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx+\int_{1}^{2}(x^2+x-2)dx+\int_{2}^{3}(-x^2+x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{2}^{3}$$

$$=-\frac{1}{3}(1+8)-\frac{1}{2}(1-4)+2(1+2)$$

$$+\frac{1}{3}(8-1)+\frac{1}{2}(4-1)-2(2-1)-\frac{1}{3}(27-8)+\frac{1}{2}(9-4)+6(3-2)$$

$$=\frac{1}{3}(-9+7-19)+\frac{1}{2}(3+3+5)+(6-2+6)$$

$$=\boldsymbol{\frac{17}{2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　2つの放物線 $y=x^2-4x+5$ と $y=-x^2-2x+9$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

$y=x^2-4x+5$ と $y=-x^2-2x+9$ の交点の x 座標は

$$x^2-4x+5=-x^2-2x+9$$

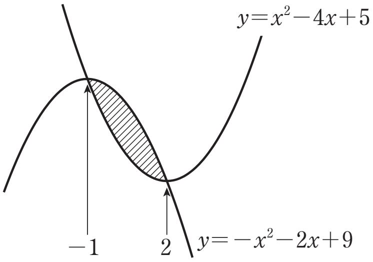
$$x^2-x-2=0 \qquad (x+1)(x-2)=0 \qquad \text{よって}\quad x=-1,\ 2$$

求める面積は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2-2x+9)-(x^2-4x+5)\}dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=-2\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$

$$=-2\times\left\{-\frac{1}{6}(2+1)^3\right\}=\mathbf{9}$$



2 [2]　$a>0$ のとき, 2つの放物線 $y=x^2-2$, $y=-ax^2+ax-1$ について, 次の問いに答えよ.

(1)　2つの放物線の交点の x 座標を求めよ.

(2)　2つの放物線で囲まれた図形の面積を求めよ.

(1)　$y=x^2-2$, $y=-ax^2+ax-1$ より

$$x^2-2=-ax^2+ax-1$$

$$(a+1)x^2-ax-1=0 \qquad (x-1)\{(a+1)x+1\}=0 \qquad a>0\ \text{より}\quad \boldsymbol{x=1,\ -\frac{1}{a+1}}$$

(2)　$a>0$ より　$-\dfrac{1}{a+1}<0$　よって求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}\{(-ax^2+ax-1)-(x^2-2)\}dx=\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}\{-(a+1)x^2+ax+1\}dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}(x-1)\{(a+1)x+1\}dx=-(a+1)\int_{-\frac{1}{a+1}}^{1}\left(x+\frac{1}{a+1}\right)(x-1)dx$$

$$=-(a+1)\times\left\{-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^3\right\}=\frac{1}{6}(a+1)\times\left(\frac{a+2}{a+1}\right)^3=\boldsymbol{\frac{(a+2)^3}{6(a+1)^2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1)　放物線 $C：y=x^2+x-1$ と直線 $l：y=2x+1$ の交点の座標を求めよ．

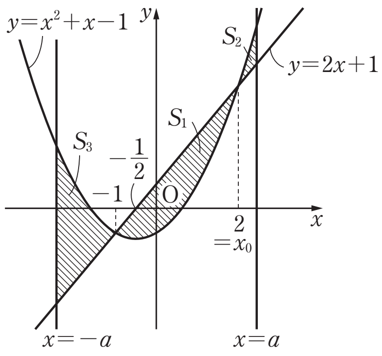
(2)　(1)で求めた交点の x 座標の大きい方を x_0 とする．$a>x_0$ とし，C と l で囲まれた領域の面積を S_1，C と l および直線 $x=a$ で囲まれた領域の面積を S_2，C と l および直線 $x=-a$ で囲まれた領域の面積を S_3 とする．$S_1=S_2+S_3$ となるときの a の値を求めよ．

(1)　C と l の式より y を消去して

$x^2+x-1=2x+1$

$x^2-x-2=0$　　$(x+1)(x-2)=0$　　$x=-1,\ 2$

よって　求める交点の座標は　**$(-1,\ -1)$，$(2,\ 5)$**



(2)　$x_0=2$ より，$a>2$　　　グラフは右図．

$S_1=S_2+S_3$ より

$$\int_{-1}^{2}\{(2x+1)-(x^2+x-1)\}dx$$

$$=\int_{-a}^{-1}\{(x^2+x-1)-(2x+1)\}dx+\int_{2}^{a}\{(x^2+x-1)-(2x+1)\}dx$$

$$-\int_{-a}^{-1}(x^2-x-2)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx-\int_{2}^{a}(x^2-x-2)dx=0$$

$$\int_{-a}^{-1}(-x^2+x+2)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx+\int_{2}^{a}(-x^2+x+2)dx=0$$

$$\int_{-a}^{a}(-x^2+x+2)dx=0$$

偶関数，奇関数に注意して

$$2\int_{0}^{a}(-x^2+2)dx=0 \qquad \left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^a=0$$

$-\dfrac{1}{3}a^3+2a=0$　　$a>0$ より　$a^2-6=0$　　$a^2=6$　　よって　$\boldsymbol{a=\sqrt{6}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　積分法

[1]　曲線 C：$y=|x^2-2x|$ と直線 l：$y=\dfrac{1}{2}x$ によって囲まれた面積は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である.

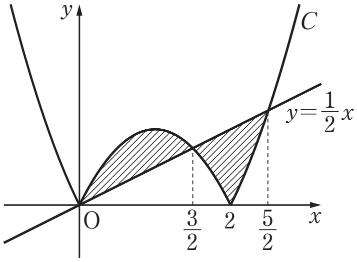
[2]　2つの放物線 $y=x^2-3x+2$, $y=-2x^2-x+3$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である.

解答例

[1]　$x^2-2x=\dfrac{1}{2}x$ より　$x(2x-5)=0$　$x=0,\ \dfrac{5}{2}$

$-x^2+2x=\dfrac{1}{2}x$ より　$x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=0$　　$x=0,\ \dfrac{3}{2}$

よって曲線 C と直線 l の交点の x 座標は　$x=0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}$



求める面積は

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{(-x^2+2x)-\frac{1}{2}x\right\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left\{\frac{1}{2}x-(-x^2+2x)\right\}dx+\int_2^{\frac{5}{2}}\left\{\frac{1}{2}x-(x^2-2x)\right\}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{3}{2}}x\left(x-\frac{3}{2}\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)dx+\int_2^{\frac{5}{2}}\left(-x^2+\frac{5}{2}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}-0\right)^3+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2\right]_{\frac{3}{2}}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2\right]_2^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\left(8-\frac{27}{8}\right)-\frac{3}{4}\left(4-\frac{9}{4}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{125}{8}-8\right)+\frac{5}{4}\left(\frac{25}{4}-4\right)=\mathbf{\frac{17}{16}}$$

[2]　$y=x^2-3x+2$, $y=-2x^2-x+3$　より

$x^2-3x+2=-2x^2-x+3$　　$3x^2-2x-1=0$　　$(3x+1)(x-1)=0$　　$x=-\dfrac{1}{3},\ 1$

よって求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\{(-2x^2-x+3)-(x^2-3x+2)\}dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(-3x^2+2x+1)dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(3x+1)(x-1)dx$$

$$=-3\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)dx$$

$$=(-3)\cdot\left\{-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}$$

$$=\mathbf{\frac{32}{27}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。